1. En un lago la población de peces es P, H es un parámetro conocido como la razón de pesca, es decir la cantidad de peces que se extraen por unidad de tiempo (peces/año). La tasa de crecimiento de la población de peces como función de la población está dada por

$$R(P) = 2P - 0.02P^2 - H$$

Para cada uno de los siguientes valores del parámetro $H = 75, 100, 200$ esboza la gráfica de $R(P)$ contra P. Encuentra el valor de P para el cuál la tasa de crecimiento es máxima.

2. En un día se ha encontrado que la velocidad del tráfico en una avenida principal es $v(t) = t^3 - 10.5t^2 + 30t + 20$ millas por hora, donde t son las horas *después* del mediodía. Esboza la gráfica usando $t = 1, 2, 3 \dots 6$. Calcula el momento en el tráfico es más rápido y en el que es más lento. Calcula las velocidades máximas y mínimas.

3. La temperatura corporal en un individuo sigue un ciclo circadiano con un modelo dado por la siguiente relación
$$T(t) = 0.002(t^3 - 45t^2 + 609t + 16000)$$
donde $T(t)$ es la temperatura corporal y t es el tiempo en horas transcurrido desde las 8 hasta el fin del día, $8 \leq t \leq 24$. Encuentra la temperatura máxima y mínima y a qué hora del día se alcanza.

4. Una encuesta indica que x meses después de que se lanza una candidatura a presidente. Cierto candidato obtiene $S(x)$ por ciento de la intención de voto, donde $S(x) = \frac{1}{29}(-x^3 + 6x^2 + 63x + 1080)$, esboza la gráfica utilizando $x = 0, 1, 2, \dots, 12$. A) ¿Después de cuántos meses, la candidatura tiene la mayor intención de voto? ¿de cuánto es ese porcentaje?

2.6 Ejercicios de repaso

1. La reacción del cuerpo a las drogas está dada por la ecuación

$$R(D) = D^2 \left(\frac{M}{2} - \frac{D}{3} \right)$$

donde D es la dosis administrada, M es una constante que representa la dosis que produce máxima reacción.

   (a) Utiliza $M = 200$ y calcula la derivada $R'(D) = dR/dD$.

   (b) Evalúa la derivada en los siguientes valores de D

$$0, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350$$

   esboza la gráfica de $R'(D)$. Compara con el ejercicio del capítulo anterior.

2. La gráfica 2.4, muestra el crecimiento de la estatura $E(x)$ de un individuo como función de su edad x. E se mide en cm y x en años. Se hicieron mediciones cada cumpleaños, obteniéndose los datos:

$$45, 59, 64, 74, 90, 108, 115, 118, 122, 131, 132, 135, 140, 154, 172, 179, 184, 186, 188, 189.5, 190.$$

   (a) Determina el cambio ΔE y la razón media de cambio $\Delta E/\Delta x$ en los intervalos

$$[13, 18], [13, 17], [13, 16], [13, 15], [13, 14].$$

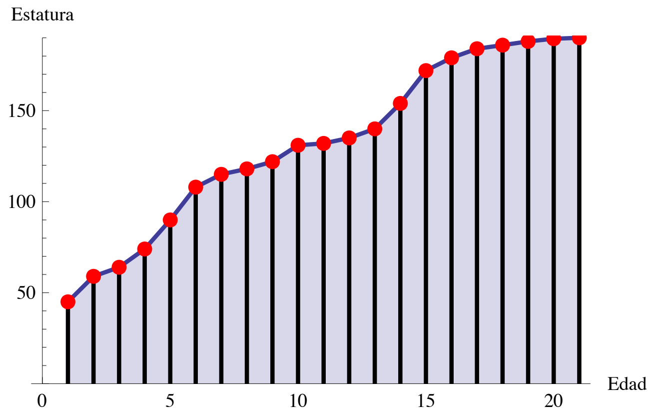

Figura 2.4: Estatura como función de la edad

(b) Usa las aproximaciones sucesivas del inciso anterior para dar el valor aproximado de la tasa o rapidez instantánea de crecimiento a los 13 años, $E'(13)$.

(c) Emplea el mismo procedimiento para calcular un valor aproximado de la tasa instantánea de cambio a los 17 años, $E'(17)$.

(d) ¿A qué edad se produce el "estirón", es decir el crecimiento más rápido de la estatura?

3. Una población de chimpancés en cierto habitat tiene el siguiente modelo de crecimiento

$$P(t) = 100(1 + 0.3t + 0.04t^2)$$

donde $P(t)$ es la población, t es el tiempo transcurrido en meses.

(a) Calcula la razón de crecimiento $P'(t)$.

(b) Esboza la gráfica de $P'(t)$ utilizando $t = 0, 10, 20, \ldots, 100$.

4. La razón de crecimiento anual r de una población de rapaces está dada por la relación

$$r(P) = 0.02P - 0.000025P^2$$

donde P es la población de ese año.

(a) Esboza la gráfica para $P = 100,\ 200,\ \ldots,\ 1000$.

(b) La población está en equilibrio cuando la razón de cambio r es 0. Determina las poblaciones P para las que estas aves se encuentran en equilibrio.

(c) Encuentra la derivada de la razón de cambio $r'(P) = dr/dP$.

(d) Resuelve la ecuación $r'(P) = 0$ para encontrar la población P para la que la razón de cambio r es máxima.

5. El gasto total de energía por día en crías (cervatillos) de antílopes americanos se estimó utilizando la "fórmula de Nagy"

$$E(x) = 0.774 + 0.727 \ln x$$

donde x es el peso (en gr) de la cría, y $E(x)$ es el gasto de energía (en *kJ/día*).

(a) Esboza la gráfica para $x \in [5000, 20000]$.

(b) Calcula $E'(x)$. ¿Cuáles son sus unidades?.

(c) Calcula $E(10000)$ y $E'(10000)$. Da una interpretación biológica de estas cantidades.

6. Supongamos que en un tratamiento la concentración $h(t)$, de cierta hormona es función del tiempo transcurrido t:
$$h(t) = 40(e^{-0.005t} - e^{-0.15t})$$
donde h se mide en nanogramos por decilitro de sangre (ng/dl) y t en días.

   (a) Calcula $h'(t)$.

   (b) Encuentra t para el cual se tiene la mayor concentración de la hormona en la sangre.

7. De 1750 a 1880 se tiene un modelo exponencial de crecimiento poblacional mundial
$$P(t) = 760e^{.005t}$$
donde $P(t)$ es la población mundial t años después de 1750. De acuerdo a este modelo ¿cuál era la tasa de crecimiento de la población en 1800?

8. En un estudio psicológico se quiere conocer como se olvida la información visual conforme transcurre el tiempo. Para estudiar el porcentaje de retención R de ciertas palabras después de transcurridos t horas. Se obtuvo la relación
$$R(t) = 30 + 70e^{-.46t}$$

   (a) ¿Cuánto tiempo después se ha olvidado el 50% de la información?

   (b) Esboza la gráfica para $0 \leq t \leq 12$.

   (c) ¿Aproximadamente qué porcentaje de la información ya no se olvida después de transcurrido mucho tiempo? en otras palabras ¿Cuánto vale $R(t)$ si t es muy grande digamos $t = 100, 1000$?

   (d) Calcula $R'(t)$. ¿Cuánto vale $R'(t)$ para valores muy grandes de t?

9. Un estudio de eficiencia en el trabajo muestra que un trabajador promedio que llega a las 8:00 hrs habrá producido $Q(t) = -t^3 + 8t^2 + 15t$ unidades t horas después. Calcula la tasa de producción $Q'(t)$ del trabajador. Calcula la tasa de producción a las 9:00 hrs.

10. Indica si las siguientes funciones son crecientes, decrecientes en toda la recta numérica a) $-3.2 + 2.5x$; b) $3.2e^{-3t}$; c) $0.5e^{2.3t}$

11. Un ornitólogo determina que aproximadamente en un periodo de 17 horas, la temperatura corporal de cierta especie de aves fluctúa de acuerdo con la fórmula $T(t) = -68.7t^3 + 30.98t^2 + 12.52t + 37.1$ para $0 \leq t \leq 0.713$ donde T es la temperatura medida en grados celsius t días después del inicio de un periodo.

    (a) Calcula e interpreta la derivada $T'(t)$.

    (b) Calcula la razón a la que cambia la temperatura al inicio del periodo ($t = 0$) ¿Aumenta o disminuye la temperatura?

    (c) ¿En qué instante no cambia la temperatura, no aumenta ni disminuye?. Calcula la temperatura en ese instante.

12. Se estima que después de t meses un empleado postal promedio puede clasificar $Q(t) = 700 - 400e^{-0.5t}$ cartas por hora.

(a) ¿Cuántas cartas por hora puede clasificar un empleado nuevo?
(b) Calcula la rapidez de aprendizaje $Q'(t)$
(c) Calcula la rapidez de aprendizaje en $t = 0, 2, 4, 6, 8$.

13. El yodo radioactivo tiene una vida media de 20.9 horas. a) Utilizando la ley de decaimiento radioactivo $Q(t) = Q_0 e^{-\lambda t}$

    (a) calcula cuánto yodo radioactivo permanece en el resto del cuerpo del paciente (fuera de la tiroides) 25 horas después de la inyección.
    (b) Calcula la rapidez con la que el yodo se está desintegrando 25 horas después de la inyección.

14. En su fase inicial, de 1984 a 1990, el SIDA crecía de acuerdo a la función cúbica $C(t) = -170.36t^3 + 1707.5t^2 + 1998.4t + 4404.8$, donde C es el número reportado de casos, y t es el número de años transcurridos desde 1984, $0 \leq t \leq 6$.

    (a) Calcula e interpreta la derivada $C'(t)$.
    (b) Calcula la tasa de propagación de la epidemia en 1984.
    (c) Calcula el número de casos reportados en 1990.
    (d) Calcula en qué momento el número de casos fue máximo de acuerdo a este modelo y cuál fue el número máximo de casos.
    (e) Calcula en qué momento se propagó la enfermedad con mayor rapidez.

15. En una proyección de 5 años, la población P de cierta comunidad crece después de t años de acuerdo a la fórmula $P(t) = -t^3 + 9t^2 + 48t + 200$.

    (a) Calcula la razón de crecimiento de la población dentro de 3 años.
    (b) ¿Crece o decrece la población dentro de 3 años?
    (c) Calcula la tasa de cambio dentro de 5 años.

16. Se ha estimado que el costo mensual de producción de x unidades de un artículo es $C(x) = 0.06x + 3x^{1/2} + 20$ cientos de dólares.

    (a) Calcula el costo de producción de 2500 unidades,
    (b) Calcula la tasa de cambio del costo por unidad producida cuando la producción alcanza las 3000 unidades.

17. Una niña cae en un lago a una temperatura de -3 grados centígrados. Su temperatura corporal después de t minutos en el agua es $T(t) = 35e^{-0.32t}$. Ella perderá la conciencia cuando su temperatura corporal llegue a 27 grados.

    (a) ¿Cuánto tiempo tiene los socorristas para salvarla?
    (b) ¿Qué tan rápido desciende la temperatura corporal cuando acaba de caer al agua?

18. Se estima que si se gastan x miles de dólares en publicidad, se venderán $Q(x) = 50 - 40e^{-0.1t}$ miles de dólares de un artículo.

    (a) ¿Cuánto se venderá si no se gasta en publicidad?
    (b) ¿Cuánto se venderá si se gastan 8 mil dólares en publicidad,

(c) Calcula la tasa de cambio de las ventas por mil dólares de publicidad cuando ya se han gastado 8 mill dólares de publicidad.

19. Una población P de una colonia de bacterias t días después del inicio de la observación se modela mediante la función cúbica $P(t) = 1.035t^3 + 103.5t^2 + 6900t + 230000$.

    (a) Calcula e interpreta la derivada.

    (b) Calcula la tasa de cambio de la población después de un día, ¿crece o decrece la población?

    (c) Calcula la población inicial.

    (d) Calcula la razón de cambio de la población después de 10 días.

    (e) Calcula la población máxima en el intervalo $0 \leq t \leq 20$.

20. Se ha obtenido que si se publicita un producto por televisión, el número N de personas (en millones) enteradas del producto t días después de que se inicia la transmisión de los comerciales correspondientes es $N(t) = 2 - 2e^{-.037t}$.

    (a) Calcula el número de personas enteradas, 2 días después,

    (b) Calcula la rapidez con la que las personas se están enterando del nuevo producto al inicio de la campaña;

    (c) Calcula el momento en el que se han enterado 1.5 millones de personas de la publicidad.

21. Un médico inyecta 5 mg de tinte en una vena cerca del corazón y determina que la concentración del tinte después de t horas es $C(t) = -0.027t^2 + 0.672t$ mg/L.

    (a) Calcula $C'(t)$,

    (b) Esboza la gráfica de $C(t)$ y de $C'(t)$ usando $t = 0, 4, 8, \ldots, 24$.

    (c) Calcula el momento que la concentración es máxima.

    (d) Calcula la concentración máxima.

22. Los registros indican que x años después del 2000, el impuesto predial para una casa de cuatro recámaras, fue de $I(x) = 3x^2 + 40x + 1800$.

    (a) ¿Cuál fue el impuesto en el 2005?

    (b) ¿Cuál fue la tasa de crecimiento del impuesto en el 2003?

23. El costo de producir x miles de unidades de cierto bien es $C(x) = 9x + 5e^{-20x}$

    (a) Calcula $C'(x)$;

    (b) Esboza la gráfica de $C(x), C'(x)$, en $x = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.

    (c) Determina el número de unidades que hacen que el costo sea mínimo.

    (d) Calcula el costo mínimo.

24. En un modelo el número de palabras $N(t)$ que un niño aprende t semanas después de que aprende a hablar está dada por la relación

$$N(t) = 71.4 \ln(0.3t + 1))$$

    (a) Esboza la gráfica en el intervalo $[1, 24]$.

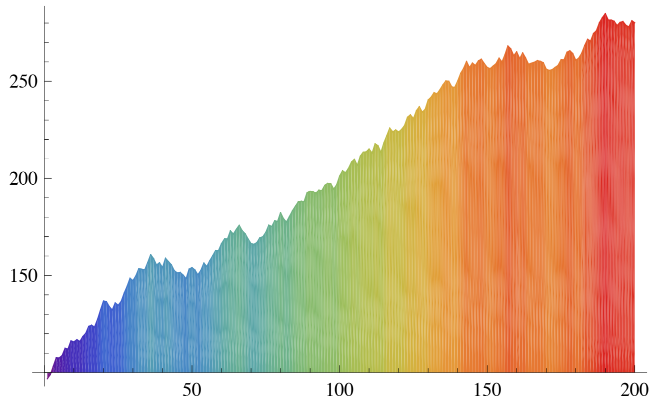

Figura 2.5: Aumento de la actividad gamma en el cerebro, detectado en electroencefalograma

(b) Calcula el número de palabras que conocería 18 meses después. ¿En cuánto tiempo se habrá duplicado ese número de palabras?

(c) Utiliza que

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{d}{dx}u$$

y Calcula la derivada $N'(t) = dN/dt$.

(d) ¿Con qué velocidad está el niño aprendiendo seis meses después de que empezó a hablar?

25. La gráfica 2.5 corresponde a mediciones hechas con un encefalograma para determinar el potencial de la actividad gamma en el cerebro durante el periodo meditativo. El eje x corresponde al tiempo transcurrido (medido en segundos) y el eje y al potencial eléctrico V (en μVolt^2). Determina el cambio ΔV y la razón media de cambio $\Delta V/\Delta x$, de la actividad gamma en los intervalos $[0, 50], [50, 100], [100, 150]$.